

# PEMODELAN DISPERSI GAUSSIAN MENGGUNAKAN METODE TRANSFORMASI LAPLACE DAN INTEGRASI DENGAN CITRA SATELIT GOOGLE EARTH

## *Modeling of Gaussian Dispersion by Using Laplace Transform and Integration with Google Earth Imagery*

A. Sulaiman dan M. Sadly

Pusat Teknologi Inventarisasi Sumberdaya Alam (PTISDA)  
Badan Pengkajian dan Penerapan Teknologi (BPPT)  
Gedung Geotech Kawasan Puspiptek Serpong, Tangerang 15314  
Email: albertus.sulaiman@bppt.go.id

*Diterima: 12 Mei 2014; Diperiksa: 27 Mei 2014; Revisi: 9 Juni 2014; Disetujui: 23 Juni 2014*

### **Abstract**

*The pollutants dispersion around the factory will be studied with a Gaussian dispersion. An advection diffusion equation that represent dispersion of air pollution generated by a lot of a chimney will be solved by using Laplace transform methods and simulate the result in Google Earth images. The result showed that the diffusion coefficient which is expresses the width of the pollutants dispersion will have broader form if the measurement far from the source. Simulation showed if the chimney is higher then the pollutants will be spread broader. The integration of simulation results with Google Earth led outcomes more informative and user friendly.*

**Keywords:** *gaussian model, google earth, Laplace transforms, plume*

### **Abstrak**

Dispersi polutan disekitar pabrik akan diselidiki dengan model dispersi Gaussian. Persamaan adveksi-difusi yang memberikan sebaral polusi udara dengan sumber banyak cerobong pabrik akan diselesaikan dengan metode transformasi laplace dan simulasi hasil akan diintegrasikan dengan Google Earth. Hasil menunjukkan bahwa koefisien difusi yang merepresentasikan lebar dari sebaran polutan akan melebar sejalan dengan semakin jauh dari sumber. Simulasi juga menunjukkan bahwa semakin tinggi sumber maka polutan akan semakin menyebar ke area yang lebih luas. Integrasi hasil simulasi dengan Google Earth menghasilkan informasi yang lebih mudah diinterpretasikan dan menarik.

**Kata kunci:** *model gaussian, google earth, transformasi laplace*

## **1. PENDAHULUAN**

Dengan meningkatnya kebutuhan energi terutama dari bahan bakar fosil maka permasalahan ikutan akan timbul yaitu pencemaran (polusi) udara. Sebenarnya disamping buatan manusia, sumber polusi udara juga dapat disebabkan oleh berbagai kegiatan alam, seperti kebakaran hutan, gunung meletus, gas alam beracun, dll. Dampak dari polusi udara tersebut adalah adanya penurunan kualitas udara, yang berdampak negatif terhadap kesehatan manusia[1]. Polusi udara akibat akti-vitas pabrik merupakan merupakan masalah yang sampai saat ini belum teratasi karena pada umumnya di sekitar pabrik banyak hunian. Oleh karena itu penanganan dan manajemen permasalahan ini menjadi penting dilakukan.

Suatu informasi dini tentang perilaku sebaran (dispersi) polutan di sekitar pabrik akan sangat penting sebagai antisipasi, tindakan preventif dan

regulasi serta tindakan pengawasan oleh instansi berwenang. Salah satu cara untuk mendapatkan informasi tersebut adalah melalui suatu model matematika yang memerikan dinamika spatio-temporal dispersi asap pabrik.

Model matematika yang dapat dijalankan secara cepat akan membantu dalam penyediaan informasi dini. Model yang cepat ini dapat diperoleh dengan suatu model analitik karena tidak memerlukan waktu komputasi yang lama. Dalam makalah ini persamaan adveksi-difusi yang memerikan dispersi polutan oleh suatu cerobong pabrik diselesaikan secara analitik dengan menggunakan transform Laplace. Pemilihan metode ini didasarkan kepada fakta bahwa saat ini metode transform Laplace banyak mendapat perhatian luas dari peneliti karena dapat digunakan untuk kasus yang lebih kompleks seperti transport fluida di media berporos[2] ,

polusi udara [3,4] dan pemodelan lingkungan secara umum [5]. Dengan penerapan metode ini ke model polusi udara maka pengembangan model ke masalah yang lebih rumit akan mudah dilakukan. Agar memberi kemudahan dalam pengambilan keputusan maka hasil simulasi model akan di gabungkan dengan citra dari *Google Earth* melalui perangkat lunak Matlab. Dalam perkembangannya perangkat lunak ini semakin banyak digunakan dalam tataran praktis seperti pemodelan lingkungan[5], dispersi hidrodinamika[6], serta aktivitas vulkano[7].

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

- Memodelkan sebaran polutan banyak cerobong secara analitik dengan metode transform Laplace.
- Mengabungkan hasil model dengan citra dari *Google Earth*. Perangkat lunak yang digunakan adalah Matlab R2008b.

## 2. BAHAN DAN METODE

### 2.1 Solusi analitik

Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini adalah pembuatan model analitik yaitu memodelkan suatu fenomena dengan cara mencari solusi dari suatu persamaan yang diperikan dalam fungsi-fungsi kontinu. Persamaan yang digunakan adalah persamaan adveksi-difusi yang memerikan dispersi polutan dari suatu cerobong pabrik. Pada dasarnya dispersi zat pencemar di atmosfer mempunyai dua mekanisme dasar yaitu dispersi akibat angin yang dikenal dengan nama proses adveksi dan kedua karena adanya proses difusi yaitu penjalaran material akibat adanya beda konsentrasi. Jika konsentrasi diperikan oleh simbol  $C(x, y, z, t)$  dan sumber polutan  $S$  serta dispersi polutan dinyatakan oleh suatu fluks  $J(x, y, z,)$  maka kedua proses tersebut dinyatakan oleh persamaan[3],

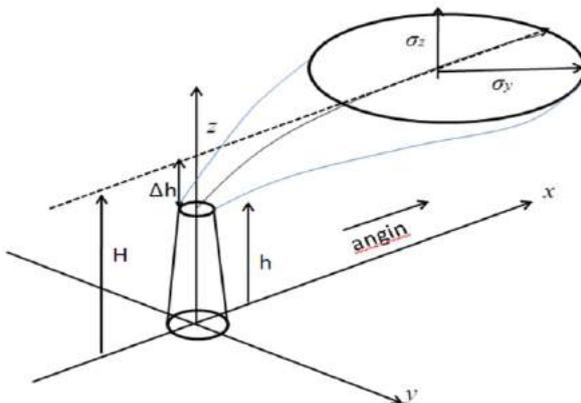
$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = S \dots\dots\dots(1)$$

dimana  $J$  yang menyatakan proses adveksi dan difusi dinyatakan berturut-turut sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \vec{J}_{adveksi} &= \vec{v}C \\ \vec{J}_{difusi} &= -\vec{\kappa} \cdot \nabla(C) \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

dimana  $\kappa$  adalah koefisien difusi turbulen yang secara umum berbentuk tensor rank dua dan dinyatakan dalam bentuk matrik  $3 \times 3$ . Berdasarkan teori similaritas maka koefisien turbulen tersebut merupakan fungsi dari kestabilan atmosfer[8]. Kecepatan angin dinyatakan dalam symbol  $\mathbf{v}$ . Pers-(1) bukanlah persamaan tertutup, artinya kita harus menentukan  $\mathbf{v}$ ,  $\kappa$  dan sumber  $S$

supaya persamaan tersebut diperoleh solusinya.



Gambar 1. Sistem koordinat model Gaussian

Dalam praktek kita tidak asal memilih tetapi berdasarkan kondisi lapangan. Untuk kasus cerobong pabrik maka akan dipilih kondisi sebagai berikut: pertama, kecepatan angin konstan dan dominan dalam satu arah saja katakanlah arah zonal ( $x$ ) maka  $\mathbf{v} = (U, 0, 0)$ . Kedua, sumber polutan dianggap suatu titik dan sesaat dengan ketinggian  $H$  sehingga  $S = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z - H)$ . Sistem koordinat yang digunakan diperikan dalam Gambar-1. Pada dasarnya  $H$  adalah ketinggian virtual karena  $H = h + \Delta h$  dimana  $h$  adalah tinggi suatu cerobong dan  $\Delta h$  adalah kepulan asap atau asap yang keluar dari mulut cerobong (*plume rise*) yang tergantung kepada gaya apung[8,9]. Ketiga, kecepatan angin cukup besar sehingga difusi searah angin diabaikan  $\kappa \partial C / \partial x = 0$ . Keempat, konsentrasi bersifat peluruhan  $C(x, y, z \rightarrow \infty) = 0$ . Kelima, variasi topografi diabaikan sehingga permukaan dianggap bidang datar di  $z = 0$ . Keenam, skala waktu cukup panjang sehingga konsentrasi tunak  $\partial C / \partial t = 0$  serta polutan tidak masuk ke tanah  $\partial C / \partial z = 0$ . Dengan asumsi diatas maka Pers-(1) menjadi,

$$\begin{aligned} U \frac{\partial C}{\partial x} &= \kappa_y(x) \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \kappa_z(x) \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \\ C(0, y, z) &= \frac{Q}{U} \delta(y) \delta(z - H) \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

Dalam penelitian ini akan diberikan penurunan solusi Gaussian tersebut dengan teknik transform Laplace dimana diyakini metode ini lebih bersifat umum dan dapat diterapkan untuk kasus yang lebih rumit. Penerapan transform Laplace dilakukan dengan mengasumsikan konsentrasi dapat dinyatakan dalam bentuk  $C(x, y, z) = Q/U\Phi(x, y)\Psi(x, z)$ . Subtitusikan ke Pers-(3) maka akan diperoleh,

$$\frac{1}{\Phi} \left( \kappa_y(x) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - U \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{\Psi} \left( \kappa_z(x) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - U \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0 \dots\dots(4)$$

dimana kedua persamaan tersebut akan dipenuhi jika suku pertama adalah konstanta sembarang dan suku kedua negatif dari konstanta yang pertama. Lebih lanjut, karena sifat peluruhan dari konsentrasi maka konstanta tersebut dapat kita pilih sama dengan nol. Jadi kita akan mempunyai dua persamaan yang saling bebas sebagai berikut,

$$\kappa_y(x) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - U \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\kappa_z(x) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - U \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

Selesaikan Pers.(5) dengan mengintroduksi variabel baru sebagai berikut,

$$r_1 = \frac{1}{U} \int_0^x \kappa_y(\xi) d\xi . \quad \dots\dots\dots(7)$$

Maka Pers-(5) menjadi,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

dengan syarat batas  $\Phi(0,y)=\delta(y)$ . Selanjutnya terapkan transform Laplace terhadap variabel  $r_1^{(10)}$ ,

$$\hat{\Phi}(\rho, y) = \int_0^\infty e^{-\rho r_1} \Phi(r_1, y) dr_1 \quad \dots\dots\dots(9)$$

maka dari tabel transform Laplace diperoleh turunan orde satu dan dua yaitu  $L(\Phi')=\rho\Phi-\Phi_0$  dan  $L(\Phi'')=\rho^2\Phi-\rho\Phi_0-\Phi'_0$ , sehingga akan diperoleh,

$$\frac{d^2 \hat{\Phi}}{dy^2} - \rho \hat{\Phi} + \delta(y) = 0 \quad \dots\dots\dots(10)$$

Terapkan kembali transform Laplace terhadap variabel  $y$  dengan variabel transformnya adalah  $\eta$  menghasilkan,

$$\eta^2 \bar{\bar{\Phi}} - \eta \hat{\Phi}(0, \rho) - \frac{d\hat{\Phi}(\rho, 0)}{dy} - \rho \bar{\bar{\Phi}} + 1 = 0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

Dengan menerapkan invers transform Laplace (lihat tabel Transform Laplace[10]:  $L[\cosh(at)] \leftrightarrow \eta/(\eta^2-a^2)$  dan  $L[\sinh(at)] \leftrightarrow a/(\eta^2-a^2)$ ), serta menggunakan definisi fungsi hypergeometrik dan dengan syarat asimtotik  $\Phi(x,y)$  serta definisi  $\delta(y)=\lim_{r_1 \rightarrow 0} e^{-y^2/4r_1}/\sqrt{4\pi r_1}$  maka akan diperoleh,

$$\Phi(r, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi r_1}} e^{-\frac{y^2}{4r_1}} \quad \dots\dots\dots(12)$$

Dengan cara yang sama maka akan diperoleh solusi untuk  $\psi$ ,

$$\Psi(r_2, z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi r_2}} \left[ e^{-\frac{(z-H)^2}{4r_2}} + e^{-\frac{(z+H)^2}{4r_2}} \right] \quad \dots\dots(13)$$

dimana,

$$r_2 = \frac{1}{U} \int_0^x \kappa_z(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots(14)$$

Sehingga dengan Pers-(12) dan Pers-(13) akan menghasilkan solusi untuk  $C(x,y,z)$  sebagai berikut,

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi U \sqrt{r_1 r_2}} e^{-\frac{y^2}{4r_1}} \left[ e^{-\frac{(z-H)^2}{4r_2}} + e^{-\frac{(z+H)^2}{4r_2}} \right] \quad (15)$$

Ini dinamakan solusi Gaussian.

Proses difusi yang terjadi dalam masalah polusi udara adalah difusi turbulen yaitu proses difusi yang diakibatkan oleh gerakan acak atmosfer dekat permukaan tanah[8,9]. Salah satu pandangan yang banyak digunakan dalam aplikasi adalah memandang turbulen sebagai makhluk statistik sehingga kita berbicara dalam fungsi distribusi. Solusi diatas terkait dengan fungsi distribusi Gaussian dalam teori statistik turbulensi sehingga terdapat relasi antara  $r_1, r_2$  dengan standar deviasi  $\sigma_y, \sigma_z$  sebagai berikut[8],

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2} \sigma_y^2 \\ r_2 &= \frac{1}{2} \sigma_z^2, \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(16)$$

dimana standar deviasi tersebut terkait dengan stabilitas atmosfer.

## 2.2 Solusi untuk Banyak Cerobong

Dalam suatu kawasan industri biasanya sumber polutan terdiri dari banyak cerobong sehingga secara model kita mengatakan sumber terdiri dari banyak titik. Dengan model Gaussian ini kita mengasumsikan bahwa mekanisme difusi masing masing sumber titik adalah saling bebas satu sama lain. Definiskan koordinat titik sumber melalui  $X_s = (X_s, Y_s, H_s)$  dan sumber emisi ( $Q_s$ ). Konsentrasi masing-masing titik akan dinyatakan oleh  $C(x', y', z, Q_s, H_s)$  dimana tanda ' menyatakan koordinat pergeseran yang didefinisikan sebagai berikut,

$$x' = x - X_s \quad \text{dan} \quad y' = y - Y_s \quad \dots\dots\dots(17)$$

maka dengan sistem koordinat tersebut, konsentrasi total menjadi penjumlahan skalar semua konsentrasi sumber yaitu,

$$C_T(x, y, z) = \sum_{s=1}^N C(x'_s, y'_s, z, Q_s, H_s) \quad \dots\dots\dots(18)$$

Dalam perhitungan diperlukan iterasi untuk setiap sumber dari Pers-(15) dan akan dihitung sebanyak  $N$ -kali.

### 2.3 Implementasi dengan Matlab

Perangkat lunak Matlab merupakan akronim dari *Matrix Laboratory* merupakan perangkat lunak matematika yang telah dikembangkan lebih dari dua dekade. Perangkat lunak ini sangat unggul untuk memodelkan masalah analitik maupun numerik yang sudah disertai banyak subprogram pembantu untuk mengatasi berbagai masalah baik di sains, rekayasa bahkan sampai keuangan[5]. Disamping sangat efektif dalam penulisan koding, sedikit *error*, dia dilengkapi dengan visual yang sangat indah sehingga menjadi favorit di dunia ilmiah.

Untuk memvisualisasikan model Gaussian diatas maka langkah pertama adalah membuat matrik untuk koordinat yang kita inginkan dengan perintah *meshgrid*. Visualisasi hasil dalam bentuk kontur yang penuh, digunakan perintah *contourf*. Dalam implementasi dengan Matlab maka solusi Gaussian akan dinyatakan dalam *gplume.m* sebagai berikut,

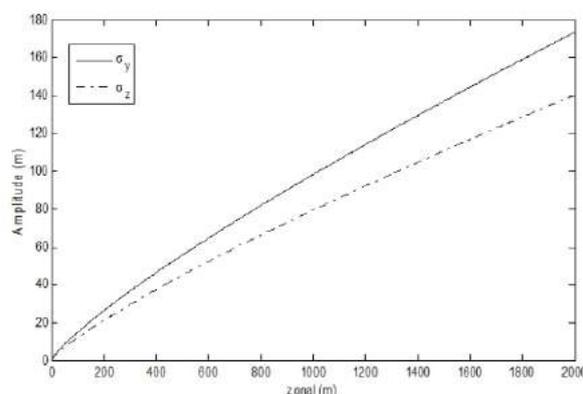
```
function C = gplume( x, y, z, H, Q, U )
% (modifikasi dari Stockie 2011)
% x –(zonal), y=meridional dan z=vertikal.
% H - source height (m), % Q – rata rata emisi (kg/s)
% U – kecepatan angin (m/s)
% Output: Konsentrasi (kg/m^3)
% kecepatan angin minimum (cut off)
Umin = 0.0;
% Kondisi udara unstabil
ay = 0.34; by = 0.82; az = 0.275; bz = 0.82;
sigmay = ay*abs(x).^by .* (x > 0);
sigmaz = az*abs(x).^bz .* (x > 0);
% perhitungan dgn syarat batas
if U < Umin,
C = 0 * z;
else
C=Q ./ (2*pi*U*sigmay.*sigmaz) .* ...
exp( -0.5*y.^2./sigmay.^2 ) .* ...
( exp( -0.5*(z-H).^2./sigmaz.^2 ) +...
exp( -0.5*(z+H).^2./sigmaz.^2 ) );
ii = find(isnan(C) | isinf(C));
C(ii) = 0;
end
Overlay gambar dari google earth akan
dinyatakan dalam perintah,
imagesc([min_x max_x], [min_y max_y],
flipdim(img,1));
set(gca,'ydir','normal');
Sedangkan overlay gambar tersebut dengan
hasil model akan dinyatakan dalam perintah,
h2 = findobj(h2, 'type', 'patch');
set(h2, 'facealpha', 0.2);
```

Hasil dari program tersebut akan diberikan dalam bab selanjutnya.

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Disini akan diberikan gambaran suatu kawasan pabrik  $X$  dengan empat cerobong. Asumsikan setiap cerobong mempunyai emisi  $Z_n$ , yaitu [5, 20, 5,10]  $\times 10^{-3}$  kg/s. Ketinggian masing masing cerobong [15,30,30,15] meter (m) dan kecepatan angin maksimum 3 m/s yang berarah ke timur, kecepatan gas keluar cerobong 5 m/s dan diameter cerobong 0.5 m maka estimasi ketinggian plume rise adalah<sup>(11)</sup>  $\Delta h = -0.029x(10^{0.5}/3) + 2.62(\sqrt{4800/3}) = 6.15m$ .

Tabel 1. menyajikan hasil analisa sifat fisik dan kimia dari tanah tercemar minyak bumi yang digunakan dalam penelitian ini.



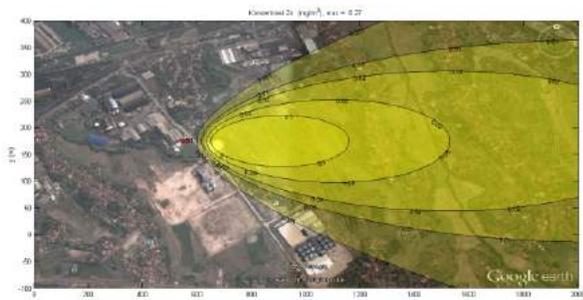
Gambar 2. Standar deviasi sebagai fungsi dari koordinat zonal.

Setelah emisi di tentukan maka proses penting lain yang harus diketahui adalah mekanisme adveksi. Proses ini adalah proses hidrodinamika dimana angin sebagai bentuk fluida akan bergerak dengan memenuhi hukum kekekalan momentum atau dikenal dengan nama persamaan Navier-Stokes. Pada dasarnya setelah kita menyelesaikan persamaan ini untuk mendapatkan perilaku kecepatan angin ( $v$ ) maka proses adveksi dapat diketahui. Dalam kasus ini kecepatan angin dianggap konstan sehingga kita tidak perlu menyelesaikan persamaan Navier-Stokes

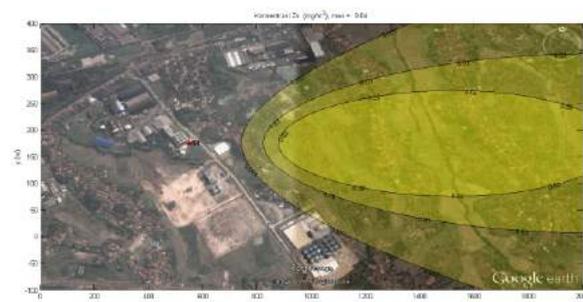
Koordinat  $r_1$  dan  $r_2$  yang 'menghilangkan' angin disebut koordinat tanpa angin, tetapi kebergantungan terhadap koordinat zonal masih tetap ada yaitu muncul di koefisien dispersi. Koefisien ini berbanding lurus dengan standar deviasi  $\sigma_y = a_y x^{b_y}$ ,  $\sigma_z = a_z x^{b_z}$  dimana untuk kondisi atmosfer tak stabil maka<sup>(8)</sup>  $a_y = 0.34$ ,  $b_y = 0.82$ ,  $a_z = 0.275$  dan  $b_z = 0.82$ . Plot standar deviasi terhadap koordinat zonal dinyatakan pada Gambar 2. Dari gambar terlihat bahwa standar deviasi yang menyatakan melebarnya bentuk asap dalam arah  $y$  dan  $z$  akan semakin membesar jika semakin jauh dari sumber. Sebaran dalam arah horisontal lebih lebar dibandingkan arah vertikal.

Hasil perhitungan model Gaussian untuk sumber satu cerobong dengan kecepatan angin 3 m/s serta standar deviasi pada Gambar 2, yang di overlay dengan citra dari *Google Earth* diberikan

dalam Gambar 3. Konsentrasi menyebar secara simetris sebagai konsekuensi solusi Gaussian. Terlihat konsentrasi maksimum tidak terletak diatas cerobong tetapi setelah berjarak sekitar 100 m dari mulut cerobong. Jika ketinggian cerobong dinaikkan menjadi 75 m maka hasilnya dapat dilihat pada Gambar 4. Dari gambar terlihat bahwa polutan menyebar dalam area yang lebih luas. Hasil simulasi (gambar tidak di tunjukkan) menyatakan bahwa semakin tinggi cerobong maka polutan akan disebarakan semakin luas dan semakin jauh.

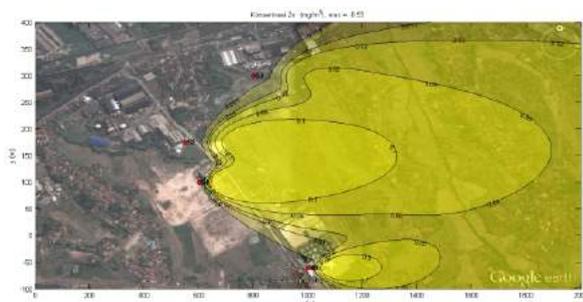


Gambar3. Overlay model dispersi Gaussian dengan citra satelit di Google Earth untuk kasus satu cerobong dengan  $h=30m$ . ainnnya yang diuji.



Gambar 4. Overlay model dispersi Gaussian dengan citra satelit di Google Earth untuk kasus satu cerobong dengan  $h=75m$ .

Dispersi polutan untuk kondisi empat cerobong diperikan dalam Gambar 5.



Gambar 5. Overlay model dispersi Gaussian dengan citra satelit di Google Earth, dimana titik merah menyatakan lokasi cerobong.

Dari gambar terlihat bahwa konsentrasi polutan akan besar di sekitar sumber yang

berdekatan dan tersebar lebih merata dimana hal ini disebabkan karena konsentrasi adalah besaran skalar yang bersifat penjumlahan. Bentuk dispersi tidak lagi simetri tetapi mempunyai bentuk tergantung dari letak cerobong.

Model Gaussian yang digunakan mempunyai koefisien difusi hanya bervariasi secara zonal dan tidak dalam arah vertikal. Untuk wilayah Indonesia dimana permukaan tanah mengalami penyinaran Matahari secara intensif maka kondisi atmosfer akan konvektif. Kondisi ini ditandai dengan kecepatan angin vertikal yang tinggi serta variasi angin zonal terhadap ketinggian (*shear*) besar. Jadi kecepatan angin tidaklah konstan tetapi bervariasi dengan ketinggian. Modifikasi model dengan variasi angin berubah terhadap ketinggian serta variasi topografi akan berguna untuk mendapatkan gambaran kelakuan dispersi polutan secara lebih realistis. Pekerjaan ini sedang dilakukan.

#### 4. KESIMPULAN

Pemodelan sebaran polutan dari suatu cerobong pabrik dengan model dispersi Gaussian dan integrasi dengan citra satelit *Google Earth* telah dilakukan. Penurunan model berdasarkan transform Laplace telah dipaparkan. Koefisien difusi yang menyatakan melebarnya bentuk asap dalam arah  $y$  dan  $z$  akan semakin membesar jika semakin jauh dari sumber. Hasil simulasi menunjukkan bahwa semakin tinggi cerobong maka polutan akan disebarakan semakin jauh. Integrasi hasil simulasi dengan citra *Google Earth* menyebabkan hasil lebih informatif, mudah diinterpretasikan dan diimplementasikan. Model yang dikembangkan disini, dapat juga diaplikasikan untuk kasus polusi lainnya dengan sedikit penyesuaian dalam model integrasinya.

#### DAFTAR PUSTAKA

1. Kementrian Lingkungan Hidup. 2010. Kumpulan Karya Tulis Pilihan 2010, "menuju pembangunan berkelanjutan" Media Indonesia, Jakarta.
2. Kumar,A., D. K. Jaiswal., and R. R. Yadav., 2012. Analytical Solutions of One-Dimensional Temporally Dependent Advection-Diffusion Equation along Longitudinal Semi-Infinite Homogeneous Porous Domain for Uniform Flow, IOSR Journal of Mathematics, 2, 1, 1-11.
3. Stockie, J.M. 2011. The Mathematics of Atmospheric Dispersion Modeling, SIAM Review. 53 (2): 349-472.
4. Guerrero, J.S.P., L.C.G. Pimentel., J.F. Olivera-Junior., P.F.L. Heilbon Filho and A.G. Ulke, 2012. A unified analytical solution of the steady-state atmospheric diffusion equation, Atmospheric Environment, 55, 201-212
5. Holzbecher, E. (2007). Environmental Modeling using MATLAB. Springer-Verlag, Heidelberg.

6. Atangana, A and S.C.O. Noutchie, 2013. Two-dimension hydrodynamics dispersion equation with seepage velocity and dispersion coefficient as function of space and time, *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2013, Article ID 206942, 7 pages.
7. Bursik, M.I. 2009. Volcanic plumes and wind: Jetstream Interaction examples and implications for air traffic. *J. Volc. and Geo. Res.*, 5, 231-243.
8. Seinfeld, J.H. and S.N. Pandis., 2006. *Atmospheric Chemistry and Physics from Air Pollution to Climate Change*, John Wiley and Sons, New York.
9. Foken, T. 2008. *Micrometeorology*, Springer-Verlag, Berlin.
10. Boas, M.L. 1983. *Mathematical Methods in The Physical Science*, John Wiley and Son, New York, page: 635-638.
11. Guldberg, P.H. 1975. A Comparison study of plume rise formulas applied to tall stack data. *J. Applied. Meteorology*, 14, 1402-1406.